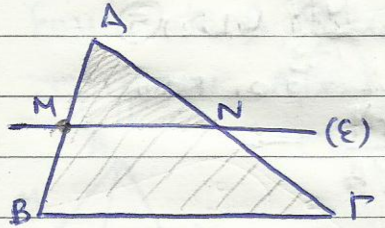
2) Αν σε ένα τρίγωνο φέρουμε μία ευθεία παράλληλη προς μία πλευρά του, τότε αυτή ορίζει τμήματα ανάλογα στις άλλες δύο πλευρές. Δηλαδή $(ε) \parallel BΓ \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{NΓ}{NA}$



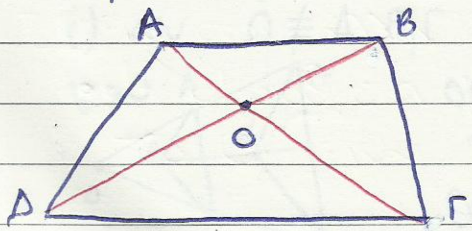
Θεωρούμε την ομοιοθεσία $H_{A,\frac{AB}{AM}}$ (προφανώς $H_{A,\frac{AB}{AM}}(M) = B$). Αφού $(ε) \parallel BΓ$ και η H "στέλνει" το N πάνω στο $(ε')$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow H_{A,\frac{AB}{AM}}(N) = Γ$.

η H: $\overset{\triangle}{AMN} \mapsto \overset{\triangle}{ABΓ} \to \overset{\triangle}{AMN} \simeq \overset{\triangle}{ABΓ} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AΓ}{AN} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB-AM}{AM} = \frac{AΓ-AN}{AN} \Rightarrow \boxed{\frac{MB}{AM} = \frac{NΓ}{AN}}$

5) Έστω τραπέζιο $ABΓΔ$ ($AB \parallel ΓΔ$) και έστω ότι οι διαγώνιοι τέμνονται στο O. νδο (μέσω ομοιοθεσίας) ότι τα $\overset{\triangle}{AOB}$ και $\overset{\triangle}{OΔΓ}$ είναι όμοια:



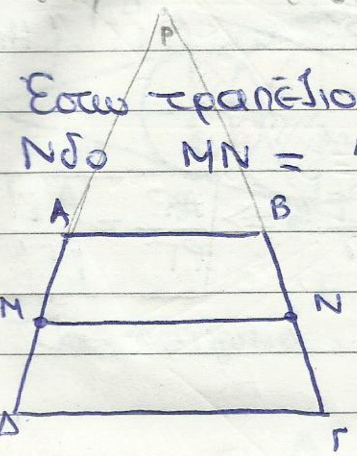
Θεωρούμε ομοιοθεσία $H_{O,-\frac{OΔ}{OB}}$ που απεικονίζει το $B \mapsto Δ$ με κέντρο O.

φυσικώς θα απεικονιστεί το $A \mapsto \Gamma$

Άρα, το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB} \mapsto \overset{\triangle}{O\Delta\Gamma} \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \simeq \overset{\triangle}{O\Delta\Gamma}$

4) Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ και ΜΝ η διάμεσος αυτού

Ν.δ.ο. $MN = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2}$ (ΑΒ, ΓΔ οι βάσεις)



αν ΑΔ, ΒΓ παράλληλες $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ προφανές εξορισμού από ορισμό παραλληλογράμμου

Έστω λοιπόν ότι τέμνονται και Ρ σημείο τομής

Έστω ομοιοθεσία η ομοιοθεσία $H_{P,\frac{PM}{PA}} : AB \mapsto MN$

και μάλιστα $\frac{MN}{AB} = \frac{PM}{PA}$ (1) θεωρούμε επίσης ομοιοθεσία $H_{P,\frac{P\Delta}{PM}} : MN \mapsto \Delta\Gamma$ και μάλιστα $\frac{\Delta\Gamma}{MN} = \frac{P\Delta}{PM}$ (2)

και έπειτα πολ/ζω κατά μέλη τις (1) και (2):

$$\frac{\cancel{MN}}{AB}\cdot\frac{\Delta\Gamma}{\cancel{MN}} = \frac{\cancel{PM}}{PA}\cdot\frac{P\Delta}{\cancel{PM}} \Rightarrow \frac{\Delta\Gamma}{AB} = \frac{P\Delta}{PA} \quad (3)$$

$$(1)\quad \frac{MN}{AB} = \frac{PM}{PA} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{PA+AM}{PA} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = 1 + \frac{AM}{PA} \quad (4) \Rightarrow \frac{AM}{PA} = \frac{MN}{AB} - 1 \quad (5)$$

$$(3):\ \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{P\Delta}{PA} \Rightarrow \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{PA+2AM}{PA} = 1 + 2\frac{AM}{PA} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{PA} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma\Delta}{AB} - 1\right) \quad (6)$$

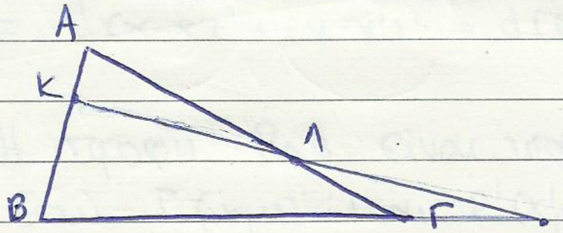
Από (5),(6) $\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma\Delta}{AB} - 1\right) = \frac{MN}{AB} - 1 \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma\Delta}{AB} + 1\right]$

$$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma\Delta}{AB} + \frac{AB}{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma\Delta+AB}{AB}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}(\Gamma\Delta + AB)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΜΕΝΕΛΑΟΥ)

Αν μία ευθεία τέμνει τις πλευρές ενός τριγώνου ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ (ή τις προεκτάσεις τους) δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ στα σημεία Κ, Λ, Μ αντίστοιχα, τότε $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BM}{M\Gamma}\cdot\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A}=1$ και αντίστροφα



Έστω $\overset{H_1}{H_{K,-\frac{KA}{KB}}}$ και $\overset{H_2}{H_{\Lambda,-\frac{\Lambda\Gamma}{\Lambda A}}} \xrightarrow{\text{σύνθεση}} B\mapsto\Gamma$

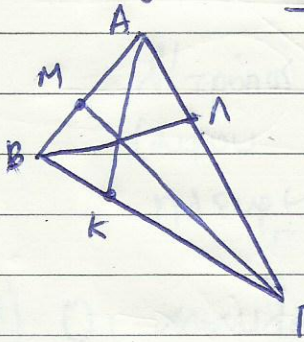
$B\mapsto A$ $\qquad A\mapsto\Gamma$

$\overset{H_3}{H_{M,\frac{M\Gamma}{MB}}}(B)=\Gamma$ (αποτελεί τη σύνθεση των δύο παραπάνω ομοιοθεσιών)

με $H_3=H_2\cdot H_1 \to \frac{M\Gamma}{MB}=\frac{KA}{KB}\cdot\frac{\Lambda\Gamma}{\Lambda A} \Rightarrow \boxed{\frac{KA}{KB}\cdot\frac{\Lambda\Gamma}{\Lambda A}\cdot\frac{MB}{M\Gamma}=1}$

Εφαρμογή (Θεώρημα Ceva)

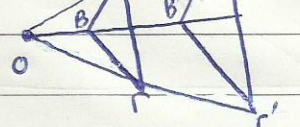
Έστω Κ, Λ, Μ σημεία των πλευρών ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ (τυχαίου τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$) και οι ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ συντρέχουν στο Ο τότε $\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BK}{K\Gamma}\cdot\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A}=1$



Πρόταση: Ένα ομοιόθετο τρίγωνο ΑΒΓ ως προς μία ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο |κ|, $H_{O,|\kappa|}$ απεικονίζεται

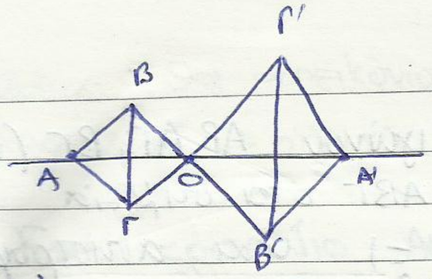
i) αν $O\not\equiv A,B,\Gamma$ και δεν ανήκει σε κάποια από τις πλευρές

κ>0



όπου Ο σημείο τομής των ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' και ΑΒ∥Α'Β', ΒΓ∥Β'Γ', ΑΓ∥Α'Γ'

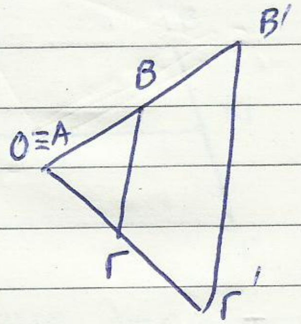
Θετική ομοιοθεσία



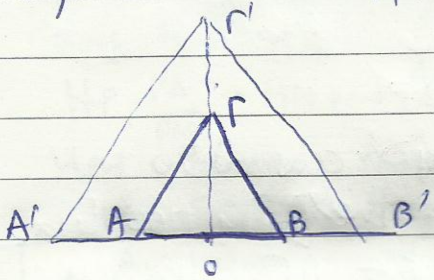
$k<0$

αρνητική ομοιοθεσία

ii) αν το $O \equiv A$ ή B ή Γ



iii) αν το O ανήκει σε κάποια από τις πλευρές



Η Έννοια της Ισομετρίας:

Ορισμός: Ισομετρία καλείται ο γεωμετρικός μετασχηματισμός που διατηρεί τις αποστάσεις (ή (X_1,d_1) και (X_2,d_2) δύο μετρικοί χώροι $\varphi: X_1 \to X_2$. Η φ ισομετρία εάν $d_1(x,y)=d_2(\varphi(x),\varphi(y))$.

Π.χ.

$\mathbb{R}$: φ ισομετρία: $|\varphi(x)-\varphi(y)|=|x-y|$

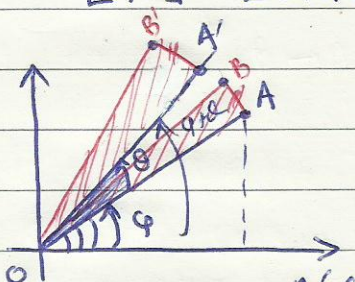
δηλ. για $\varphi(x)=-x$ ισομετρία αφού
$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|(-x)-(-y)|=|-x+y|=|x-y|$ ή για
$\varphi(x)=x+1$ ισομετρία αφού $|\varphi(x)-\varphi(y)|=$
$=|(x+1)-(y+1)|=|x-y|$

Παραδείγματα :

1) Η μεταφορά είναι ισομετρία στον $\mathbb{R}^2$ ($\tau_{\vec{a}}$)
όπου $\vec{a}=(\mu,\nu)$. Έστω $P(x,y) \xmapsto{\tau_{\vec{a}}} P'(x+\mu, y+\nu)$ και
$Q(x',y') \xmapsto{\tau_{\vec{a}}} Q(x'+\mu, y'+\nu)$.
$d(P,Q)=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ και $d(P',Q')=\sqrt{(x+\mu-(x'+\mu))^2+((y+\nu)-(y'+\nu))^2}=$
$=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}=d(P,Q)$

2) Η στροφή $R_{O,\theta}$ είναι ισομετρία στον $\mathbb{R}^2$
Εάν $P(x,y)$ και $P'(x',y')$ η εικόνα αυτού μέσω της $R_{O,\theta}$

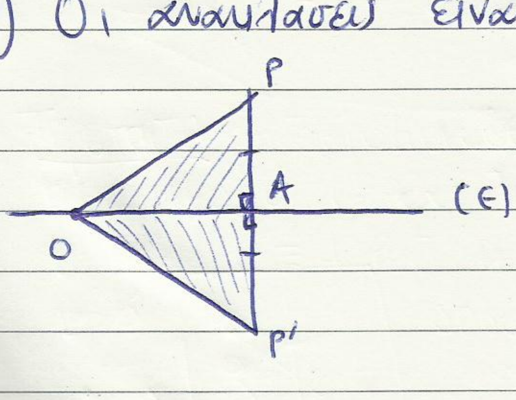
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$



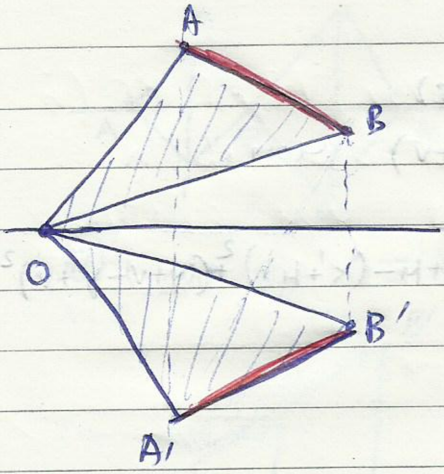
$|\vec{OA}|=r$
$A(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$
τότε $A'(x',y')$
όπου $A'(x',y')=(r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi\sin\theta+r\sin\varphi\cos\theta)=$
$=(r\cos(\varphi+\theta),\ r\sin(\varphi+\theta))$
όπου, $|OA'|=\sqrt{r^2(\cos^2(\varphi+\theta)+\sin^2(\varphi+\theta))}=\sqrt{r^2}=r=|\vec{OA}|$
αφού $\varphi(\vec{OB})=\vec{OB'}$ και $\varphi(\vec{OA})=\vec{OA'}$
τότε $|\varphi(\vec{AB})|=|\varphi(\vec{OB}-\vec{OA})| \underset{\text{στροφή γραμμική}}{=} |\varphi(\vec{OB})-\varphi(\vec{OA})| = |\vec{OB'}-\vec{OA'}| = |\vec{A'B'}|$

β' τρόπος νδο τα τρίγωνα $OB'A'$ και OBA ίσα
(αφού $(OA)=(OA')$ και $(OB)=(OB')$ και η περιεχόμενη στις πλευρές γωνία ίση (θ ίκανη).

3) Οι ανακλάσεις είναι ισομετρίες (ή κατοπρισμοί)



$|\vec{OP'}|=|\vec{OP}|$ (από ισότητα τριγώνων)



$|\vec{OA}| = |\vec{OA'}|$ και $|\vec{OB}| = |\vec{OB'}|$

Έπεται ότι $|\vec{AB}| = |\vec{A'B'}|$
από ισότητα των δύο τριγώνων